

Об области выбора оптимальных параметров численного метода решения нестационарной задачи гидродинамики с угловой сингулярностью

А. В. РУКАВИШНИКОВ

Институт прикладной математики ДВО РАН, 680038, Хабаровск, Россия

Контактный автор: Рукавишников Алексей Викторович, e-mail: 78321a@mail.ru

Поступила 16 января 2024 г., доработана 15 февраля 2024 г., принята в печать 22 февраля 2024 г.

Построен приближенный метод решения нестационарных нелинейных уравнений Навье – Стокса течения вязкой несжимаемой жидкости в области с входящим углом. В зависимости от входных данных и геометрии области экспериментально определена область оптимальных параметров в переменных ν и ν^* в зависимости от расстояния δ до точки сингулярности. Параметры ν и δ входят в определение R_ν -обобщенного решения задачи, а ν^* определяет степень весовой функции в предложенном методе конечных элементов. Для дискретизации задачи по времени использованы методы Рунге – Кутты первого и второго порядков.

Ключевые слова: нелинейные уравнения Навье – Стокса, угловая сингулярность, весовой метод конечных элементов.

Цитирование: Рукавишников А.В. Об области выбора оптимальных параметров численного метода решения нестационарной задачи гидродинамики с угловой сингулярностью. Вычислительные технологии. 2024; 29(6):93–107. DOI:10.25743/ICT.2024.29.6.006.

Введение

Эффективное численное решение задач, описывающих течение вязкой несжимаемой жидкости, представляет особый интерес для исследователей и инженеров. Существует несколько причин, по которым дискретизация таких задач методом конечных элементов (МКЭ) может столкнуться со значительными трудностями. Одна из них — наличие угловых сингулярностей и пограничных слоев в решении. В настоящей работе изучаются нестационарные уравнения Навье – Стокса в вихревой форме в двумерном многоугольнике с входящим углом на его границе. Предложен численный метод решения задачи, основанный на применении схем Рунге – Кутты как первого, так и второго порядков по времени. Обратим внимание, что решение задачи имеет особенность в окрестности входящего угла ω , $\omega \in (\pi, 2\pi)$, даже если входные данные задачи обладают достаточной гладкостью. Двумерное течение вязкой несжимаемой жидкости в невыпуклой области впервые изучалось в [1]. Хорошо известно, что слабое решение задачи (в каждый момент времени): компоненты поля скорости и давление в невыпуклой многоугольной области Ω — не принадлежат пространствам Соболева $W_2^2(\Omega)$ и $W_2^1(\Omega)$ соответственно [2]. Приближенное решение, полученное с использованием стандартных конечно-разностных схем и схем конечных элементов, сходится к точному решению задачи со

скоростью, не превышающей $\mathcal{O}(h^\alpha)$, $\alpha < 1$, в норме пространства $W_2^1(\Omega)$ (для компонент поля скорости). Такое уменьшение скорости сходимости от 1 до α называется эффектом загрязнения, который наблюдается не только в норме классического пространства Соболева, но и в норме весового пространства [3].

Существует множество современных подходов к нахождению приближенного решения задач течения вязкой жидкости, например модификации неконформных МКЭ, такие как метод виртуальных элементов (VE-метод) и разрывный метод Галёркина (DG-метод). Первый из них, VE-метод, предложен в [4]. Другой подход основан на идеях миметического метода конечных разностей [5] и использует дискретизацию метода Галёркина. Подход решает задачу построения базисных функций на произвольных элементах, в том числе невыпуклых, избегая явного представления базисных функций и используя для них квадратурные формулы.

Пространство VE-метода устроено следующим образом: основные функции классического полиномиального пространства необходимо дополнить подходящими неполиномиальными функциями [6]. Полиномиальное подпространство элементов виртуального пространства обеспечивает условия согласования билинейных форм, а неполиномиальное подпространство обеспечивает устойчивость метода за счет определения правильных проекций [7, 8].

Для DG-метода определена постановка задачи в сверхслабой форме, может применяться в областях со сложной геометрией и обладает лишь локальными свойствами сохранения и устойчивости решения. Локальный DG-метод обладает гибкостью в выборе пространств для компонент поля скорости и давления [9]. В частности, для задач с угловой особенностью используется сгущение сетки в окрестности входящего угла [10–13].

Отметим также другие подходы к решению задач о движении жидкости в областях с входящим углом на границе. Первый из них основан на дополнении пространств конечных элементов сингулярными компонентами [14], второй подход [15] — на определении двойственных функций к сингулярным компонентам решений в сочетании с введением дополнительных уравнений в вариационную постановку задачи. Третий метод, предложенный в [16], основан на разбиении расчетной области на непересекающиеся подобласти, не содержащие входящих углов. При этом узлы сетки не обязаны совпадать на общей границе соседних подобластей. Численная реализация подхода предполагает увеличение размерности дискретного пространства сингулярных компонент. Четвертый подход [17] предполагает выбор нескольких окрестностей входящего угла и изменение в них матрицы жесткости системы. При определенном их выборе, в зависимости от величины входящего угла, достигается требуемая скорость сходимости. Пятый подход основан на выборе сингулярных и регулярных компонент решения [18]. Рассчитанные коэффициенты интенсивности напряжений позволяют определить регулярные составляющие решения.

Нами разработан принципиально другой подход. В работе на каждом временном шаге определяем R_ν -обобщенное решение в несимметричной вариационной постановке задачи. В работе [19] (см. также [20]) установлены его существование и единственность в множествах весовых пространств Соболева. В [19] получена оценка, связанная с сохранением энергетического баланса аппроксимационного поля скоростей для неявной по времени схемы Кранка – Николсон (первого порядка). Впервые определять решение как R_ν -обобщенное предложено в [21] для эллиптических задач. На основе определения R_ν -обобщенного решения построена теория численных методов. Такой подход позволил ввести весовое пространство или множество в зависимости от геометрии области и вход-

ных данных (правые части, коэффициенты уравнений, граничные и начальные данные) задачи, которым R_ν -обобщенное решение принадлежит. Для задач эллиптического типа доказаны единственность решения и его дифференциальные свойства (см., например, [22]). Для решения задачи типа Стокса в [23] установлен весовой аналог условия Ладыженской – Бабушки – Брецци. Для приближенного решения эллиптических задач и задач гидродинамики разработан весовой узловый метод конечных элементов (см., например, [24–26]), а для численного решения уравнений Максвелла — весовой реберный метод конечных элементов [27]. Для эллиптических задач получены априорные оценки скорости сходимости приближенного решения к точному решению задачи по норме весовых пространств [28]. Оптимальная скорость сходимости достигается без использования сгущения сетки в окрестности точки сингулярности. Для метода со сгущением сетки хорошо известна теоретическая оценка скорости сходимости, она равна $\mathcal{O}(h)$, но при исходной сетке с шагом порядка $5 \cdot 10^{-4}$ ее последующее сгущение в окрестности точки сингулярности должно иметь еще меньший шаг. Метод перестает работать корректно, другими словами, на практике порядок сходимости приближенного решения к точному решению задачи уменьшается, в отличие от предложенного подхода [29].

В представленной работе построен и реализован численный метод решения нестационарной задачи гидродинамики с угловой сингулярностью. Проведена серия численных экспериментов модельных задач в областях с различным входящим углом на границе. Результаты показали, что приближенное R_ν -обобщенное решение (поле скорости) в каждый момент времени сходится к точному решению со скоростью $\mathcal{O}(h)$ в норме пространства $W_{2,\nu}^1(\Omega)$. Скорость сходимости не зависит от величины входящего угла, что существенно выше, чем при использовании классических конечно-элементных и конечно-разностных подходов по порядку, относительно шага сетки h (см., например, [30]). Это достигается правильным выбором степеней ν^* и μ^* весовых функций метода конечных элементов в сочетании с оптимальными значениями ν и δ в несимметричной вариационной постановке задачи. Определены области выбора оптимальных параметров метода в областях с различными входящими углами. Предложенный метод прост в реализации и позволяет инженерам с хорошей точностью рассчитывать течение жидкости в окрестности входящих углов на границе области.

1. Постановка задачи

Рассмотрим течение вязкой несжимаемой жидкости в двумерной невыпуклой многоугольной области Ω с входящим углом ω на границе $\partial\Omega$ с вершиной в начале координат $\mathcal{O} = (0, 0)$. Пусть $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ — элемент из R^2 , t — элемент по времени $\mathbf{x} \in \Omega$, $t \in (0, T)$ и $Q = \Omega \times (0, T)$. Пусть известны векторные поля $\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}_0(\mathbf{x})$ в Ω , $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \{f_i(\mathbf{x}, t)\}_{i=1}^2$ в Q и $\mathbf{g} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) = \{g_i(\mathbf{x}, t)\}_{i=1}^2$ в Q такие, что $\int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{g} d\mathbf{x} = 0$ в каждый момент времени $t \in (0, T)$. Требуется найти векторное поле скоростей $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \{u_i(\mathbf{x}, t)\}_{i=1}^2$ и скалярное поле давления $P = P(\mathbf{x}, t)$ такие, что выполняются следующие тождества:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \Delta \mathbf{u} + \operatorname{rot} \mathbf{u} \times \mathbf{u} + \operatorname{grad} P = \mathbf{f}, \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad \text{в } Q, \quad (1)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0 \quad \text{в } \Omega, \quad \mathbf{u} = \mathbf{g} \quad \text{на } \partial\Omega \times (0, T). \quad (2)$$

Для дискретизации задачи (1), (2) по времени используем схемы Рунге – Кутты как первого, так и второго порядков. Сначала введем обозначения: $\mathbf{v}^n = \mathbf{v}^n(\mathbf{x})$ для ап-

проксимации вектор-функции $\mathbf{v}(\mathbf{x}, n\Delta t)$, $n = 0, 1, 2, \dots, N$, и $\mathbf{v}^{n+\gamma}$ — вектор-функции $\mathbf{v}(\mathbf{x}, (n + \gamma)\Delta t)$, $\gamma \in (0, 1)$, $n = 0, 1, 2, \dots, N - 1$. Параметр Δt таков, что $T = N\Delta t$. Кроме того, пусть $\mathbf{v}^{-1} := \mathbf{v}^0$ и $\bar{\mathbf{v}}^{n+1} := 0.5(\mathbf{v}^{n+1} + \mathbf{v}^n)$. Пусть \mathbf{U}^n — подходящее приближение к \mathbf{u} в момент времени $n\Delta t$.

Схема первого порядка (схема Кранка–Николсон). Пусть заданы \mathbf{u}^n , $\mathbf{U}^n := 3/2\mathbf{u}^n - 1/2\mathbf{u}^{n-1}$, P^n , $\bar{\mathbf{f}}^{n+1}$ и \mathbf{g}^{n+1} . Найти \mathbf{u}^{n+1} и P^{n+1} как решения системы уравнений

$$(\Delta t)^{-1}\mathbf{u}^{n+1} - \Delta \bar{\mathbf{u}}^{n+1} + \text{rot } \mathbf{U}^n \times \bar{\mathbf{u}}^{n+1} + \text{grad } \bar{P}^{n+1} = \bar{\mathbf{f}}^{n+1} + (\Delta t)^{-1}\mathbf{u}^n \quad \text{в } \Omega, \quad (3)$$

$$\text{div } \mathbf{u}^{n+1} = 0 \quad \text{в } \Omega, \quad (4)$$

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{g}^{n+1} \quad \text{на } \partial\Omega. \quad (5)$$

Схема второго порядка. Эта схема состоит из двух шагов.

Шаг 1. Пусть заданы \mathbf{u}^n , $\mathbf{U}^n := 3/2\mathbf{u}^n - 1/2\mathbf{u}^{n-1}$, $\mathbf{f}^{n+\gamma}$ и $\mathbf{g}^{n+\gamma}$. Найти $\mathbf{u}^{n+\gamma}$ и $P^{n+\gamma}$ ($\gamma \in (0, 1)$) как решения системы уравнений

$$(\gamma\Delta t)^{-1}\mathbf{u}^{n+\gamma} - \Delta \mathbf{u}^{n+\gamma} + \text{rot } \mathbf{U}^n \times \mathbf{u}^{n+\gamma} + \text{grad } P^{n+\gamma} = \mathbf{f}^{n+\gamma} + (\gamma\Delta t)^{-1}\mathbf{u}^n \quad \text{в } \Omega, \quad (6)$$

$$\text{div } \mathbf{u}^{n+\gamma} = 0 \quad \text{в } \Omega, \quad (7)$$

$$\mathbf{u}^{n+\gamma} = \mathbf{g}^{n+\gamma} \quad \text{на } \partial\Omega. \quad (8)$$

Шаг 2. Пусть заданы \mathbf{u}^n , $\mathbf{u}^{n+\gamma}$, $P^{n+\gamma}$, $\mathbf{U}^n := 3/2\mathbf{u}^n - 1/2\mathbf{u}^{n-1}$, \mathbf{f}^{n+1} , $\mathbf{f}^{n+\gamma}$ и \mathbf{g}^{n+1} . Найти \mathbf{u}^{n+1} и P^{n+1} как решения системы уравнений

$$(\Delta t)^{-1}\mathbf{u}^{n+1} + \gamma(-\Delta \mathbf{u}^{n+1} + \text{rot } \mathbf{U}^n \times \mathbf{u}^{n+1} + \text{grad } P^{n+1}) = (\Delta t)^{-1}\mathbf{u}^n + \gamma\mathbf{f}^{n+1} + \\ + (1 - \gamma)\mathbf{f}^{n+\gamma} - (1 - \gamma)(-\Delta \mathbf{u}^{n+\gamma} + \text{rot } \mathbf{U}^n \times \mathbf{u}^{n+\gamma} + \text{grad } P^{n+\gamma}) \quad \text{в } \Omega, \quad (9)$$

$$\text{div } \mathbf{u}^{n+1} = 0 \quad \text{в } \Omega, \quad (10)$$

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{g}^{n+1} \quad \text{на } \partial\Omega. \quad (11)$$

На каждом шаге обеих схем необходимо уметь решать следующую задачу: найти векторное $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ и скалярное q поля такие, что

$$\theta \mathbf{v} - \Delta \mathbf{v} + \mathbf{W} \times \mathbf{v} + \text{grad } q = \mathbf{F} \quad \text{в } \Omega, \quad (12)$$

$$\text{div } \mathbf{v} = 0 \quad \text{в } \Omega, \quad (13)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{G} \quad \text{на } \partial\Omega, \quad (14)$$

где \mathbf{F} и \mathbf{W} — заданные вектор-функция и функция в Ω соответственно, а \mathbf{G} задана на $\partial\Omega$, $\mathbf{W} \times \mathbf{v} = (-Wv_2, Wv_1)^T$.

Определим R_ν -обобщенное решение задачи (12)–(14) в области Ω , имеющей входящий угол на $\partial\Omega$ с вершиной в начале координат. Для этого определим необходимые весовые множества.

Сначала введем понятие весовой функции $\rho(\mathbf{x})$: $\rho(\mathbf{x}) = \{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, если $\mathbf{x} \in \Omega_\delta$, и δ , если $\mathbf{x} \in \bar{\Omega} \setminus \Omega_\delta\}$, где $\Omega_\delta = \{\mathbf{x} \in \bar{\Omega} : \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leq \delta\}$ и $\delta \ll 1$. Обозначим через $L_{2,\alpha}(\Omega, \delta)$ множество функций $s(\mathbf{x})$, удовлетворяющих условиям:

$$1) \|\rho^\alpha s\|_{L_2(\Omega \setminus \Omega_\delta)} \geq C_1 > 0;$$

$$2) |s(\mathbf{x})| \leq C_2 \delta^{\alpha-\varepsilon} \rho^{\varepsilon-\alpha}(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \Omega_\delta,$$

где C_2 — положительная константа, не зависящая от $s(\mathbf{x})$; ε — малый положительный параметр, не зависящий от δ , α , $s(\mathbf{x})$, с ограниченной нормой $\|s\|_{L_{2,\alpha}(\Omega)} := \|\rho^\alpha s\|_{L_2(\Omega)}$ пространства $L_{2,\alpha}(\Omega)$, $L_{2,\alpha}^0(\Omega, \delta)$ — подмножество $L_{2,\alpha}(\Omega)$ такое, что $s \in L_{2,\alpha}^0(\Omega, \delta)$, если $s \in L_{2,\alpha}(\Omega)$ и $\|\rho^\alpha s\|_{L_1(\Omega)} = 0$.

Обозначим через $W_{2,\alpha}^1(\Omega, \delta)$ множество функций $s(\mathbf{x})$, удовлетворяющих условиям:

- 1) $\|\rho^\alpha s\|_{L_2(\Omega \setminus \Omega_\delta)} \geq C_1 > 0$;
- 2) $|s(\mathbf{x})| \leq C_2 \delta^{\alpha-\varepsilon} \rho^{\varepsilon-\alpha}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \Omega_\delta$;
- 3) $|D^1 s(\mathbf{x})| \leq C_2 \delta^{\alpha-\varepsilon} \rho^{\varepsilon-\alpha-1}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \Omega_\delta$, с ограниченной нормой пространства $W_{2,\alpha}^1(\Omega)$

$$\|s\|_{W_{2,\alpha}^1(\Omega)} := \sqrt{\sum_{|k| \leq 1} \|\rho^\alpha |D^k s|\|_{L_2(\Omega)}^2}.$$

Обозначим через $\hat{W}_{2,\alpha}^1(\Omega, \delta)$ подмножество $W_{2,\alpha}^1(\Omega)$ такое, что $s \in \hat{W}_{2,\alpha}^1(\Omega, \delta)$, если $s \in W_{2,\alpha}^1(\Omega, \delta)$, и $s = 0$ на $\partial\Omega$. Пусть $L_{\infty,\alpha}(\Omega, C_3)$ — множество функций $s(\mathbf{x})$ с нормой $\|s\|_{L_{\infty,\alpha}(\Omega, C_3)} = \text{vrai} \max_{\mathbf{x} \in \Omega} |\rho^\alpha(\mathbf{x}) s(\mathbf{x})| \leq C_3$, где $C_3 > 0$ не зависит от функции $s(\mathbf{x})$.

Будем говорить, что $\varphi(\mathbf{x}) \in W_{2,\alpha}^{1/2}(\partial\Omega, \delta)$, если существует функция $\Phi(\mathbf{x})$ из $W_{2,\alpha}^1(\Omega, \delta)$ такая, что $\Phi(\mathbf{x})|_{\partial\Omega} = \varphi(\mathbf{x})$ и $\|\varphi\|_{W_{2,\alpha}^{1/2}(\partial\Omega)} = \inf_{\Phi|_{\partial\Omega} = \varphi} \|\Phi\|_{W_{2,\alpha}^1(\Omega)}$.

Определим понятие R_ν -обобщенного решения задачи (12)–(14).

Определение 1. Пару $(\mathbf{v}_\nu, q_\nu) \in \mathbf{W}_{2,\nu}^1(\Omega, \delta) \times L_{2,\nu}^0(\Omega, \delta)$ назовем R_ν -обобщенным решением задачи (12)–(14), если \mathbf{v}_ν удовлетворяет условию (14) на $\partial\Omega$ и справедливы тождества

$$a(\mathbf{v}_\nu, \mathbf{z}) + b(\mathbf{z}, q_\nu) = l(\mathbf{z}), \quad (15)$$

$$c(\mathbf{v}_\nu, s) = 0 \quad (16)$$

для всех $(\mathbf{z}, s) \in \hat{\mathbf{W}}_{2,\nu}^1(\Omega, \delta) \times L_{2,\nu}^0(\Omega, \delta)$. Здесь $(\mathbf{F}, W, \mathbf{G}) \in \mathbf{L}_{2,\alpha}(\Omega, \delta) \times L_{\infty,\beta}(\Omega, C_3) \times \mathbf{W}_{2,\alpha}^{1/2}(\partial\Omega, \delta)$, $\nu \geq \alpha \geq 0$, $\beta \leq 2$.

Билинейные и линейная формы в (15), (16) определены следующим образом:

$$a(\mathbf{w}, \mathbf{z}) = \int_{\Omega} [\theta \mathbf{w} \cdot (\rho^{2\nu} \mathbf{z}) + \nabla \mathbf{w} : \nabla (\rho^{2\nu} \mathbf{z}) + (W \times \mathbf{w}) \cdot (\rho^{2\nu} \mathbf{z})] d\mathbf{x},$$

$$b(\mathbf{z}, p) = - \int_{\Omega} p \operatorname{div} (\rho^{2\nu} \mathbf{z}) d\mathbf{x}, \quad c(\mathbf{w}, s) = - \int_{\Omega} (\rho^{2\nu} s) \operatorname{div} \mathbf{w} d\mathbf{x}, \quad l(\mathbf{z}) = \int_{\Omega} \mathbf{F} \cdot (\rho^{2\nu} \mathbf{z}) d\mathbf{x}.$$

Замечание 1. Поскольку $b(\cdot, \cdot) \neq c(\cdot, \cdot)$, вариационная задача (15), (16) не является симметричной, в отличие от стандартной вариационной задачи (см. [31]).

Замечание 2. Если $W \in L_{\infty,\beta}(\Omega, C_3)$, $\beta \leq 2$, $\mathbf{G} = 0$ на $\partial\Omega$, то существует единственное R_ν -обобщенное решение (\mathbf{v}_ν, q_ν) задачи (12)–(14) в несимметричной постановке (15), (16) (см. теорему 5 в [19]).

Замечание 3. Схему 2 (см. (6)–(11)) будем применять, когда параметр γ равен $1 - \sqrt{2}/2$ (сильно L -устойчивая схема [32]). Схему 1 (см. (3)–(5)) можно применить ввиду доказанной в [19] (см. ниже) теоремы 1.

Теорема 1. Пусть $\nu > 0$ и \mathbf{u}^n — компонента R_ν -обобщенного решения в момент времени t_n , $n = 1, \dots, N$. Тогда существует величина $\delta_1 = \delta_1(\nu) > 0$, что для произвольного $\delta \in (0, \delta_1]$ справедливо неравенство

$$\|\mathbf{u}^n\|_{\mathbf{L}_{2,\nu}(\Omega)}^2 + \frac{1}{2\theta} \sum_{l=0}^{n-1} \|\nabla \mathbf{u}^{\bar{n}-l}\|_{\mathbf{L}_{2,\nu}(\Omega)}^2 \leq e^2 \|\mathbf{u}^0\|_{\mathbf{L}_{2,\nu}(\Omega)}^2 + \frac{4e^2 C_4}{\theta} \sum_{l=0}^{n-1} \|\mathbf{f}^{\bar{n}-l}\|_{\mathbf{L}_{2,\nu}(\Omega)}^2,$$

$n = 1, \dots, N$, $\bar{n} = n - 1/2$, $C_4 = 3C_F^2$, где C_F — константа в неравенстве Фридрихса.

2. Построение весового метода конечных элементов

Построим квазиравномерное разбиение I^h области $\bar{\Omega}$ на треугольники K_i . Треугольники K_i со сторонами порядка h являются базовыми элементами. Каждый базовый элемент разделим на три треугольника с помощью соединения его вершин с центром масс, полученные треугольники назовем конечными элементами и обозначим через L_{ij} , которые образуют разбиение J^h .

Определим основные пространства конечных элементов.

1. *Для компонент вектора скоростей.* Будем использовать лагранжевы элементы второго порядка с узлами в вершинах и серединах сторон конечных элементов L_{ij} . Линейная оболочка базисных функций $\chi_k(\mathbf{x})$ образует пространство W_h .
2. *Для давления.* В качестве узлов аппроксимации будем использовать вершины конечных элементов. Общие вершины соседних конечных элементов считаем разными узлами. На каждом треугольнике L_{ij} определяем базисные функции первого порядка $\theta_l(\mathbf{x})$, носителем которых является только один конечный элемент. Линейная оболочка таких базисных функций образует пространство S_h , состоящее из функций, разрывных при переходе от одного конечного элемента к другому, соседнему с ним.

Пара $\mathbf{W}_h \times S_h$ ($\mathbf{W}_h = W_h \times W_h$) является парой Скотта–Вогелиуса второго порядка [33].

Далее базисные функции пространств W_h и S_h умножим на весовую функцию $\rho(\mathbf{x})$ в некоторых степенях $(-\nu^*)$ и $(-\mu^*)$ соответственно. Их значения являются свободными параметрами метода и будут установлены позднее экспериментально. Определим новые базисные функции $\phi_k(\mathbf{x}) = \chi_k(\mathbf{x})\rho^{-\nu^*}(\mathbf{x})$, $\psi_l(\mathbf{x}) = \theta_l(\mathbf{x})\rho^{-\mu^*}(\mathbf{x})$.

Линейные оболочки $\{\phi_k(\mathbf{x})\}_{k=1}^{\dim V_h}$, $\{\psi_l(\mathbf{x})\}_{l=1}^{\dim Q_h}$ образуют конечномерные пространства V_h и Q_h соответственно. $\hat{V}_h = \{u_h \in V_h : u_h(M_i) = 0, \text{ где } M_i \text{ — узлы на } \partial\Omega\}$. После того как найдем решение $\hat{v}_{i,k}$, $k = 1, 2$, и \hat{q}_j в узлах M_i и N_j для компонент скорости и давления полученной системы линейных алгебраических уравнений (представленной ниже), необходимо восстановить истинные значения решения в узлах M_i и N_j по формулам $v_{i,k} = \hat{v}_{i,k}\rho^{-\nu^*}(M_i)$ и $q_j = \hat{q}_j\rho^{-\mu^*}(N_j)$. Имеем $\mathbf{V}_h = V_h \times V_h \subset \mathbf{W}_{2,\nu}^1(\Omega, \delta)$, $\hat{\mathbf{V}}_h = \hat{V}_h \times \hat{V}_h \subset \mathbf{W}_{2,\nu}^1(\Omega, \delta)$, $Q_h \subset L_{2,\nu}^0(\Omega, \delta)$.

У нас есть все необходимое для определения приближенного R_ν -обобщенного решения задачи (12)–(14).

Определение 2. Будем говорить, что пара $(\mathbf{v}_\nu^h, q_\nu^h)$ из пространств $\mathbf{V}_h \times Q_h$, \mathbf{v}_ν^h , удовлетворяющая условию (14) в узлах на $\partial\Omega$, является приближенным R_ν -обобщенным решением задачи (12)–(14), если для всех пар (\mathbf{z}^h, s^h) из пространств $\hat{\mathbf{V}}_h \times Q_h$ справедливы следующие соотношения:

$$a(\mathbf{v}_\nu^h, \mathbf{z}^h) + b(\mathbf{z}^h, q_\nu^h) = l(\mathbf{z}^h), \quad (17)$$

$$c(\mathbf{v}_\nu^h, s^h) = 0. \quad (18)$$

Система (17), (18) имеет вид

$$A\mathbf{y} + B\mathbf{z} = \mathbf{F}, \quad C^T\mathbf{y} = 0, \quad (19)$$

где $\mathbf{y} = (\hat{v}_{0,1}, \hat{v}_{1,1}, \dots, \hat{v}_{0,2}, \hat{v}_{1,2}, \dots)^T$; $\mathbf{z} = (\hat{q}_0, \hat{q}_1, \dots)^T$ и \mathbf{F} — вектор, составленный из значений линейной формы $l(\phi_k)$.

Рассмотрим сходящуюся итерационную процедуру решения (19) [34] с блочным предобуславливанием матрицы системы:

- 1) определим произвольное начальное приближение $\mathbf{y}^0, \mathbf{z}^0$ для (19);

- 2) выполним итерации $n = 0, 1, 2, \dots$, далее п. 3 и 4, пока не будет выполнено условие остановки итерационного процесса;
- 3) найдем вектор $\mathbf{y}^{n+1} = \mathbf{y}^n + \hat{A}^{-1}(\mathbf{F} - A\mathbf{y}^n - B\mathbf{z}^n)$, где \hat{A} есть переобуславливающая матрица к \hat{A} — неполная LU -факторизация A , т.е. $\hat{A} = \hat{L}\hat{U}$, где \hat{L} — нижнетреугольная, а \hat{U} — верхнетреугольная матрицы. Решаем задачу $\zeta = A\eta$ с левым переобуславливателем, используя GMRES(m)-метод [35]. Пусть $\mathbf{g}_0 = \hat{A}^{-1}(\zeta - A\eta)$, процедура Арнольди порождает ортогональный базис в подпространстве Крылова и $\alpha_0\mathbf{g}_0 + \alpha_1(\hat{A}^{-1}A)^1\mathbf{g}_0 + \dots + \alpha_{m-1}(\hat{A}^{-1}A)^{m-1}\mathbf{g}_0$ с минимальной невязкой, $\alpha_i \in R$, $m = 5$;
- 4) вычислим вектор $\mathbf{z}^{n+1} = \mathbf{z}^n + \hat{S}^{-1}C^T\mathbf{y}^{n+1}$, где \hat{S} — переобуславливающая матрица к $S = C^TA^{-1}B$. Сперва строим вспомогательную матрицу \tilde{S} к \hat{S} как весовую матрицу масс M^{ν, μ^*} пространства для давления, т.е. на каждом конечном элементе $L : (M^{\nu, \mu^*})_{i,j} = \int \rho^{2(\nu - \mu^*)} \theta_i(\mathbf{x}) \cdot \theta_j(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$, и определяем диагональную матрицу $\bar{S} : \bar{S} = \bar{M}^{\nu, \mu^*}$, где $(\bar{M}^{\nu, \mu^*})_{ii} = \sum_k (M^{\nu, \mu^*})_{ik}$. Таким образом, используя перезапускающийся GMRES(5)-метод: $\text{Span}\{\mathbf{r}, (\bar{S}^{-1}\tilde{S})^1\mathbf{r}, \dots, (\bar{S}^{-1}\tilde{S})^4\mathbf{r}\}$, где $\mathbf{r} = \bar{S}^{-1}(\boldsymbol{\xi} - \tilde{S}\mathbf{d}^{k-1})$ (более подробно см. [36, 37]), находим вектор $\mathbf{e} := \hat{S}^{-1}\boldsymbol{\xi}$ как решение внутренней итерационной процедуры:
 - (i) $\mathbf{d}^0 = \mathbf{0}$;
 - (ii) $\mathbf{d}^k = \mathbf{d}^{k-1} + \bar{S}^{-1}(\boldsymbol{\xi} - \tilde{S}\mathbf{d}^{k-1})$ ($k = 1, \dots, M$);
 - (iii) $\mathbf{e} = \mathbf{d}^M$.

Замечание 4. Если $\nu = \nu^* = \mu^* = 0$, то имеем приближенное обобщенное решение (\mathbf{v}^h, q^h) задачи (12)–(14).

3. Результаты численных экспериментов

Проведем ряд численных экспериментов для нахождения приближенного решения задачи (1), (2) как последовательности решений задачи (12)–(14) обеих схем в постановке (17), (18). Рассмотрим области Ω_k , $k = 1, 2, 3$, с входящим углом ω_k , где

$$\begin{aligned}\Omega_0 &= \{(x_1, x_2) : -1 < x_1 < 1, 0 < x_2 < 1\}, \\ \bar{\Omega}_1 &= \bar{\Omega}_0 \cup \{(x_1, x_2) : -1 \leq x_1 \leq 0, -1 \leq x_2 \leq 0\}, \\ \bar{\Omega}_2 &= \bar{\Omega}_0 \cup \{(x_1, x_2) : -1 \leq x_1 \leq 0, x_1 \leq x_2 \leq 0\}, \\ \bar{\Omega}_3 &= \bar{\Omega}_0 \cup \{(x_1, x_2) : -1 \leq x_1 \leq 0, 1/2x_1 \leq x_2 \leq 0\}.\end{aligned}$$

В этих случаях угол ω_k равен $(1 + 2^{-k})\pi$, $k = 1, 2, 3$.

Обозначим через $\mathbf{u}_{\nu}^{h_i}$ и \mathbf{u}^{h_i} приближенные R_{ν} -обобщенные и обобщенные решения (поле скорости) задачи (1), (2) соответственно в каждый момент времени. Во втором случае имеем $(\nu = \nu^* = \mu^* = 0, \delta = 1)$. В первом случае $(\nu, \nu^*, \mu^*, \delta)$ — набор свободных параметров весового метода конечных элементов.

Точное решение задачи (1), (2) поля скоростей и давления зависит от значения входящего угла ω_k . При этом в каждый момент времени поле скоростей и давление не принадлежат пространствам Соболева $W_2^2(\Omega_k)$ и $W_2^1(\Omega_k)$ соответственно и имеют в полярных координатах (r, θ) следующий вид:

$$\begin{aligned}u_1(r, \theta, t) &= e^t(r^{\lambda_k}\chi_1(\theta) + \psi_1(r, \theta)), & u_2(r, \theta, t) &= e^t(r^{\lambda_k}\chi_2(\theta) + \psi_2(r, \theta)), \\ P(r, \theta, t) &= e^t r^{\lambda_k-1}\gamma(\theta),\end{aligned}$$

где $\psi_i(r, \theta)$ — регулярная часть решения $u_i(r, \theta, t)$, т.е. функция, принадлежащая пространству $W_2^2(\Omega_k)$, а $r^{\lambda_k}\chi_i(\theta)$ и $r^{\lambda_k-1}\gamma(\theta)$ — сингулярные части решения компонент полей скорости и давления соответственно. Показатель степени λ_k таков, что он совпадает с наименьшим вещественным положительным решением уравнения $\sin(\lambda\omega_k) + \lambda\sin\omega_k = 0$. Таким образом, набор $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ принимает следующие приближенные значения (0.5445, 0.6736, 0.8008). Имеем

$$\begin{aligned}\chi_1(\theta) &= \cos(\theta)\Xi'_k(\theta) + (1 + \lambda_k)\sin(\theta)\Xi_k(\theta), \\ \chi_2(\theta) &= (\lambda_k - 1)\cos(\theta)\Xi_k(\theta) + \sin(\theta)\Xi'_k(\theta), \\ \gamma(\theta) &= (\lambda_k - 1)^{-1}(\Xi'''_k(\theta) + (1 + \lambda_k)^2\Xi'_k(\theta)).\end{aligned}$$

В этих уравнениях $\Xi_k(\theta) = [(1 + \lambda_k)^{-1}\sin((1 + \lambda_k)\theta) - (1 - \lambda_k)^{-1}\sin((1 - \lambda_k)\theta)]\cos(\lambda_k\omega_k) + \cos((1 - \lambda_k)\theta) - \cos((1 + \lambda_k)\theta)$, $\Xi'_k(\theta)$ и $\Xi'''_k(\theta)$ есть первая и третья производные по переменной θ соответственно.

В тестовых примерах рассмотрим разные шаги по пространственной переменной $h_j = 2^{1-j}h$, $h = 0.025$, $j = 1, 2, 3$. Шаг по времени $\Delta t = 0.01$, $T = 0.5$. Определим погрешности МКЭ:

- классического $E_j(G) = \|\mathbf{u} - \mathbf{u}^{h_j}\|_{\mathbf{W}_2^1(\Omega_{h_j})}$;
 - весового $E_i(R_\nu) = \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_\nu^{h_j}\|_{\mathbf{W}_{2,\nu}^1(\Omega_{h_j})}$, $\text{Val}_j(\cdot) = E_j(\cdot)/E_{j+1}(\cdot)$, $j = 1, 2$.
- Для первой схемы рассмотрим случай

$$\psi_1(r, \theta) = \psi_2(r, \theta) = 0,$$

т.е. решение содержит только сингулярные компоненты.

Для второй схемы

$$\psi_1(r, \theta) = \sin(r \cos(\theta)) \cos(r \cos(\theta)), \quad \psi_2(r, \theta) = -\cos(r \cos(\theta)) \sin(r \sin(\theta)),$$

т.е. решение содержит помимо сингулярных еще и регулярные составляющие.

Экспериментально установлено, что оптимальные значения с точки зрения сходимости достигаются при $\mu^* = \nu^*$, когда они принимают неотрицательное значение. Результаты при использовании схемы Кранка – Николсон для входящего угла, равного $3\pi/2$, представлены в таблице. Скорость сходимости приближенного решения весового МКЭ к точному решению задачи (1), (2) почти в два раза выше по порядку, чем для классического МКЭ. Скорость сходимости весового МКЭ не зависит от величины входящего угла, в то время как сходимость классического МКЭ имеет порядок $\mathcal{O}(h^\lambda)$. При этом λ уменьшается с ростом величины входящего угла ω от π до 2π .

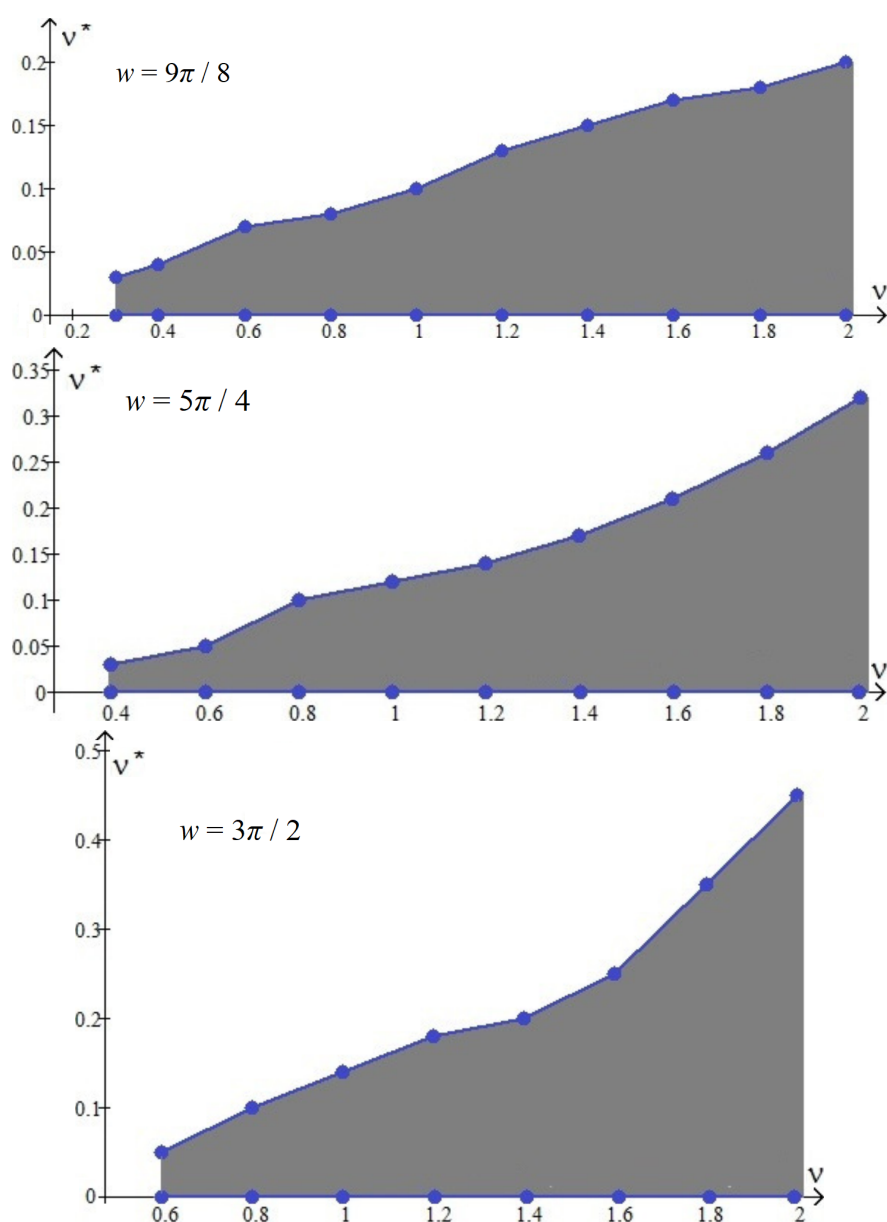
Величины погрешностей классического ($\nu = \nu^* = \mu^* = 0$, $\delta = 1$) и весового ($\nu = 1.9$, $\nu^* = 0.275$, $\delta = 0.03165$) МКЭ

Error values of classical ($\nu = \nu^* = \mu^* = 0$, $\delta = 1$) and weighted ($\nu = 1.9$, $\nu^* = 0.275$, $\delta = 0.03165$) FEM

	Классический МКЭ			Весовой МКЭ		
	$t_k = \Delta t$	$t_k = 0.5T$	$t_k = T$	$t_k = \Delta t$	$t_k = 0.5T$	$t_k = T$
$N = 80$	$2.750 \cdot 10^{-1}$	$3.559 \cdot 10^{-1}$	$4.564 \cdot 10^{-1}$	$1.801 \cdot 10^{-4}$	$2.316 \cdot 10^{-4}$	$2.997 \cdot 10^{-4}$
$N = 160$	$1.908 \cdot 10^{-1}$	$2.441 \cdot 10^{-1}$	$3.131 \cdot 10^{-1}$	$8.876 \cdot 10^{-5}$	$1.154 \cdot 10^{-4}$	$1.500 \cdot 10^{-4}$
$\text{Val}_1(\cdot)$	1.441	1.458	1.457	2.029	2.007	1.998
$N = 320$	$1.314 \cdot 10^{-1}$	$1.675 \cdot 10^{-1}$	$2.147 \cdot 10^{-1}$	$4.397 \cdot 10^{-5}$	$5.733 \cdot 10^{-5}$	$7.467 \cdot 10^{-5}$
$\text{Val}_2(\cdot)$	1.452	1.457	1.458	2.018	2.013	2.008

Основная цель настоящего исследования — определение диапазона выбора оптимальных параметров подхода в переменных ν и ν^* . Зафиксируем диапазон $\delta \sim h_1 : \delta \in [0.025, 0.035]$. Отметим, что каждый ω_k будет иметь свой диапазон изменения значений параметров. Показатель степени ν положителен, считаем, что он не больше двух. В тестах шаг изменения по переменной ν^* равен 0.01, а по переменной ν равен 0.025.

Будем считать, что точка (ν^*, ν) попадает в область выбора оптимальных параметров численного метода решения задачи (1), (2), если значения погрешности отличаются не более чем на 5 % от оптимального значения по сходимости в каждый момент времени для всех h_j , $j = 1, 2, 3$. На рисунке показаны области выбора оптимальных параметров в соответствующих диапазонах для первой схемы при входящих углах ω_k , $k = 1, 2, 3$. При использовании схемы Рунге–Кутты второго порядка результаты схожи по структуре.



Область оптимальных параметров весового МКЭ в переменных (ν, ν^*) , $\delta \in [0.025, 0.035]$

Optimal parameters of the weighted FEM for (ν, ν^*) , $\delta \in [0.025, 0.035]$

Заключение

Рассмотрено течение ньютоновской жидкости, моделируемое с помощью системы уравнений Навье – Стокса в вихревой форме в многоугольной области с угловой сингулярностью. Дискретизация задачи по времени проведена с помощью метода Рунге – Кутты первого и второго порядков. Использование схемы Кранка – Николсон первого порядка основано на полученной оценке, связанной с сохранением энергетического баланса аппроксимационного поля скоростей. Вариационная постановка задачи имеет несимметричный вид. Построен весовой метод конечных элементов для приближенного решения задачи. Представлены результаты серии численных экспериментов в невыпуклых областях. Получены следующие выводы:

- порядок сходимости приближенного решения к точному решению исходной задачи в каждый момент времени по весовому МКЭ выше по порядку, чем у классического МКЭ (относительно шага сетки h);
- результат достигается без сгущения сетки в окрестности точки сингулярности;
- экспериментально определены области выбора оптимальных параметров метода для различных значений входящего угла.

В дальнейших исследованиях, основываясь на определении R_ν -обобщенного решения и предложенного весового МКЭ, предполагаем получить теоретические и численные результаты для других форм нелинейных уравнений Навье – Стокса, таких как конвективная, кососимметричная, консервативная и др.

Отметим, что классический МКЭ теряет в два раза свой порядок точности для краевой задачи с граничными условиями Дирихле – Неймана на сторонах входящего угла по сравнению с МКЭ для краевой задачи с граничными условиями Дирихле – Дирихле и Неймана – Неймана [38]. Предложенный нами подход не теряет свой порядок точности — это было установлено для задачи теории упругости [39]. В одной из ближайших работ исследуем весовой МКЭ для рассматриваемой задачи в области с входящим углом на границе и граничными условиями Дирихле – Неймана на сторонах этого угла.

Благодарности. Работа выполнена в рамках государственного задания ИПМ ДВО РАН (№ 075-00459-24-00). Результаты получены с использованием оборудования Центра коллективного пользования “Дальневосточный вычислительный ресурс” ИАПУ ДВО РАН (<https://cc.dvo.ru>).

Список литературы

- [1] **Moffatt H.K.** Viscous and resistive eddies near a sharp corner. *Journal of Fluid Mechanics*. 1964; 18(1):1–18. DOI:10.1017/S0022112064000015.
- [2] **Dauge M.** Stationary Stokes and Navier–Stokes system on two- or three-dimensional domains with corners. I. Linearized equations. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*. 1989; (20):74–97. DOI:10.1137/0520006.
- [3] **Blum H.** The influence of reentrant corners in the numerical approximation of viscous flow problems. *Proceedings of the Fifth GAMM-Seminar, Kiel, January 20–22, 1989*. Springer; 1990. Vol. 30. DOI:110.1007/978-3-663-14004-7-4.

- [4] **Da Veiga L.B., Brezzi F., Cangiani A., Manzini G., Marini L.D., Russo A.** Basic principles of virtual element methods. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*. 2013; 23(1):199–214. DOI:10.1142/S0218202512500492.
- [5] **Lipnikov K., Manzini G., Shashkov M.** Mimetic finite difference method. *Journal of Computational Physics*. 2013; (257):1163–1227. DOI:10.1016/j.jcp.2013.07.031.
- [6] **Antonietti P.F., Da Veiga L.B., Mora D., Verani M.** A stream virtual element formulation of the Stokes problem on polygonal meshes. *SIAM Journal on Numerical Analysis*. 2014; 52(1):386–404. DOI:10.1137/13091141X.
- [7] **Wang G., Mu L., Wang Y., He Y.** A pressure-robust virtual element method for the Stokes problem. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2021; (382):113879. DOI:10.1016/j.cma.2021.113879.
- [8] **Da Veiga L.B., Lovadina C., Vacca G.** Divergence free virtual elements for the Stokes problem on polygonal meshes. *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis*. 2017; 51(2):509–535. DOI:10.1051/m2an/2016032.
- [9] **Cockburn B., Kanschat G., Schötzau D., Schwab C.** Local discontinuous Galerkin methods for the Stokes system. *SIAM Journal of Numerical Analysis*. 2002; 40(1):319–343. DOI:10.1137/S0036142900380121.
- [10] **Schötzau D., Wihler T.** Exponential convergence of mixed hp-DGFEM for Stokes flow in polygons. *Numerische Mathematik*. 2003; (96):339–361. DOI:10.1007/s00211-003-0478-5.
- [11] **Zhang F., Cheng J., Liu T.** A reconstructed discontinuous Galerkin method for incompressible flows on arbitrary grids. *Journal of Computational Physics*. 2020; (418):109580. DOI:10.1016/j.jcp.2020.109580.
- [12] **Hou Y., Han Y., Wen J.** An equal-order hybridized discontinuous Galerkin method with a small pressure penalty parameter for the Stokes equations. *Computers and Mathematics with Applications*. 2021; 93(1):58–65. DOI:10.1016/j.camwa.2021.03.031.
- [13] **Kim H.H., Chung E., Lee C.S.** A staggered discontinuous Galerkin method for the Stokes system. *SIAM Journal of Numerical Analysis*. 2013; 51(6):3327–3350. DOI:10.1137/120896037.
- [14] **Lubuma J.M.-S., Patidar K.C.** Towards the implementation of the singular function method for singular perturbation problems. *Applied Mathematics and Computation*. 2009; (209):68–74. DOI:10.1016/j.amc.2008.06.026.
- [15] **Jang D.K., Pyo J.H.** Algorithms to apply finite element dual singular function method for the Stokes equations including singularities. *Journal of Korean Society for Industrial and Applied Mathematics*. 2019; (23):115–138. DOI:10.12941/jksiam.2019.23.115.
- [16] **Al Salem A., Chorfi N.** Solving the Stokes problem in a domain with corners by the mortar spectral element method. *Electronic Journal of Differential Equations*. 2016; 2016(337):1–16.
- [17] **John L., Pustejovska P., Wohlmuth B., Rude U.** Energy-corrected finite element methods for the Stokes system. *IMA Journal of Numerical Analysis*. 2017; (37):687–729. DOI:10.1093/imanum/drw008.
- [18] **Choi H.J., Kweon J.R.** A finite element method for singular solutions of the Navier–Stokes. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2016; (292):342–362. DOI:10.1016/j.cam.2015.07.006.
- [19] **Rukavishnikov V.A., Rukavishnikov A.V.** Theoretical analysis and construction of numerical method for solving the Navier–Stokes equations in rotation form with corner singularity. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2023; (429):115218. DOI:10.1016/j.cam.2023.115218.

- [20] **Rukavishnikov V.A., Rukavishnikov A.V.** On the existence and uniqueness of an $R\nu$ -generalized solution to the Stokes problem with corner singularity. *Mathematics*. 2022; 10(10):1752. DOI:10.3390/math10101752.
- [21] **Rukavishnikov V.A.** Differential properties of an $R\nu$ -generalized solution of the Dirichlet problem. *Soviet Mathematics Doklady*. 1990; (40):653–655.
- [22] **Rukavishnikov V.A., Rukavishnikova E.I.** Existence and uniqueness of an $R\nu$ -generalized solution of the Dirichlet problem for the Lamé system with a corner singularity. *Differential Equations*. 2019; 55(6):832–840. DOI:10.1134/S0012266119060107.
- [23] **Rukavishnikov A.V., Rukavishnikov V.A.** New numerical approach for the steady-state Navier–Stokes equations with corner singularity. *International Journal of Computational Methods*. 2022; (19):2250012. DOI:10.1142/S0219876222500128.
- [24] **Rukavishnikov V.A., Nikolaev S.G.** Weighted finite element method for an elasticity problem with singularity. *Doklady Mathematics*. 2013; (88):705–709. DOI:10.1134/S1064562413060215.
- [25] **Rukavishnikov V.A., Rukavishnikov A.V.** On the properties of operators of the Stokes problem with corner singularity in nonsymmetric variational formulation. *Mathematics*. 2022; 10(6):889. DOI:10.3390/math10060889.
- [26] **Рукавишников А.В.** Об оптимальном наборе параметров приближенного метода решения стационарных нелинейных уравнений Навье – Стокса с сингулярностью. *Вычислительные технологии*. 2022; 27(6):70–87. DOI:10.25743/ICT.2022.27.6.007.
- [27] **Rukavishnikov V.A., Mosolapov A.O.** New numerical method for solving timeharmonic Maxwell equations with strong singularity. *Journal of Computational Physics*. 2012; 231(6):2438–2448. DOI:10.1016/j.jcp.2011.11.031.
- [28] **Rukavishnikov V.A., Rukavishnikova E.I.** Weighted finite element method and body of optimal parameters for elasticity problem with singularity. *Computers & Mathematics with Applications*. 2023; (151):408–417. DOI:10.1016/j.camwa.2023.10.021.
- [29] **Рукавишников В.А., Николаев С.Г.** Численный анализ весового метода конечных элементов для задачи теории упругости с сингулярностью. *Вычислительные технологии*. 2016; 21(6):89–103.
- [30] **Girault V., Raviart P.A.** Finite element methods for Navier–Stokes equations. Theory and algorithms. Berlin-Heidelberg-N.Y.-Tokyo: Springer-Verlag; 1986: 374.
- [31] **Boffi D., Brezzi F., Fortin M.** Mixed finite element methods and applications. Berlin: Springer; 2013: 685. DOI:10.1007/978-3-642-36519-5.
- [32] **Alexander R.** Diagonally implicit Runge–Kutta methods for stiff odes. *SIAM Journal on Numerical Analysis*. 1977; (14):1006–1021.
- [33] **Scott L.R., Vogelius M.** Norm estimates for a maximal right inverse of the divergence operator in spaces of piecewise polynomials. *Mathematical Modeling and Numerical Analysis*. 1985; (19):111–143.
- [34] **Bramble J.H., Pasciak J.E., Vassilev A.T.** Analysis of the inexact Uzawa algorithm for saddle point problems. *SIAM Journal on Numerical Analysis*. 1997; (34):1072–1092. DOI:10.1137/S0036142994273343.
- [35] **Saad Y.** Iterative methods for sparse linear systems. Minneapolis: Society for Industrial and Applied Mathematics; 2003: 547.
- [36] **Rukavishnikov V.A., Rukavishnikov A.V.** Weighted finite element method for the Stokes problem with corner singularity. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2018; (341):144–156. DOI:10.1016/j.cam.2018.04.014.

- [37] **Rukavishnikov V.A., Rukavishnikov A.V.** New numerical method for the rotation form of the Oseen problem with corner singularity. *Symmetry*. 2019; 11(1):54. DOI:10.3390/sym11010054.
- [38] **Ciarlet P.** The finite element methods for elliptic problems. Amsterdam: North-Holland; 1978: 529.
- [39] **Rukavishnikov V.A., Rukavishnikova E.I.** Weighted finite-element method for Elasticity problems with singularity. *Finite Element Method. Simulations, Numerical Analysis and Solution Techniques*, Eds. Pacurar Razyan. London: IntechOpen Limited; 2018: 295–311. DOI:10.5772/intechopen.72733. Available at: <https://elibrary.ru/item.asp?id=43135863&ysclid=m2466uiw1z30103709>.

Вычислительные технологии, 2024, том 29, № 6, с. 93–107. © ФИЦ ИВТ, 2024
Computational Technologies, 2024, vol. 29, no. 6, pp. 93–107. © FRC ICT, 2024

ISSN 1560-7534
eISSN 2313-691X

COMPUTATIONAL TECHNOLOGIES

DOI:10.25743/ICT.2024.29.6.006

On the determination for the domain of optimal parameters for the numerical method applied for solution of non-stationary hydrodynamics problem with corner singularity

A. V. RUKAVISHNIKOV

Institute of Applied Mathematics of the FEB RAS, 680038, Khabarovsk, Russia

Corresponding author: Alexey V. Rukavishnikov, e-mail: 78321a@mail.ru

Received January 16, 2024, revised February 15, 2024, accepted February 22, 2024.

Abstract

The purpose of the paper is to experimentally find the domain of optimal parameters of the constructed numerical method for solving non-stationary Navier–Stokes equations in a polygonal domain with a corner singularity, i. e. in a domain with reentrant corner on the boundary. Time discretization is carried out using Runge–Kutta schemes of the 1st and 2nd order. At each moment of time, the solution of the problem is defined as R_ν -generalized one in special sets of weight spaces. Unlike the classical variational formulation, we obtain a nonsymmetrical one. We use the 2nd order Runge–Kutta scheme in the case of its strong L -stability or the 1st order scheme due to the established fact associated with the preservation of the energy balance of the approximation velocity field for a certain R_ν -generalized solution of the problem. A numerical method that does not reduce the convergence rate of the approximate solution to the exact one at each time instant without condensing the mesh in the vicinity of the singularity point is proposed. In this case, this order of convergence does not depend on the value of the reentrant corner and is equal to one relative to the grid step. Actually, using the classical finite element method and the finite difference method, the error arising in the vicinity of the reentrant corner extends to the entire computational domain, even where the solution has the necessary smoothness. As a result, contrary to our approach, the order of convergence decreases. Moreover, greater value of the reentrant corner leads to the greater difference between approaches in terms of the approximation order. The proposed method is based on the introduction of a weight function to some extent in the variational formulation of the problem and special basis functions in the finite element method.

Keywords: nonlinear Navier–Stokes equations, corner singularity, weighted finite element method.

Citation: Rukavishnikov A.V. On the determination for the domain of optimal parameters for the numerical method applied for solution of non-stationary hydrodynamics problem with corner singularity. Computational Technologies. 2024; 29(6):93–107. DOI:10.25743/ICT.2024.29.6.006. (In Russ.)

Acknowledgements. The research was carried out within the state assignment for IAM FEB RAS (No. 075-00459-24-00). The results were obtained using the equipment of SRC “Far Eastern Computing Resource” IACP FEB RAS (<https://cc.dvo.ru>).

References

1. **Moffatt H.K.** Viscous and resistive eddies near a sharp corner. *Journal of Fluid Mechanics*. 1964; 18(1):1–18. DOI:10.1017/S0022112064000015.
2. **Dauge M.** Stationary Stokes and Navier–Stokes system on two- or three-dimensional domains with corners. I. Linearized equations. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*. 1989; (20):74–97. DOI:10.1137/0520006.
3. **Blum H.** The influence of reentrant corners in the numerical approximation of viscous flow problems. *Proceedings of the Fifth GAMM-Seminar, Kiel, January 20–22, 1989*. Springer; 1990. Vol. 30. DOI:10.1007/978-3-663-14004-7-4.
4. **Da Veiga L.B., Brezzi F., Cangiani A., Manzini G., Marini L.D., Russo A.** Basic principles of virtual element methods. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*. 2013; 23(1):199–214. DOI:10.1142/S0218202512500492.
5. **Lipnikov K., Manzini G., Shashkov M.** Mimetic finite difference method. *Journal of Computational Physics*. 2013; (257):1163–1227. DOI:10.1016/j.jcp.2013.07.031.
6. **Antonietti P.F., Da Veiga L.B., Mora D., Verani M.** A stream virtual element formulation of the Stokes problem on polygonal meshes. *SIAM Journal on Numerical Analysis*. 2014; 52(1):386–404. DOI:10.1137/13091141X.
7. **Wang G., Mu L., Wang Y., He Y.** A pressure-robust virtual element method for the Stokes problem. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2021; (382):113879. DOI:10.1016/j.cma.2021.113879.
8. **Da Veiga L.B., Lovadina C., Vacca G.** Divergence free virtual elements for the Stokes problem on polygonal meshes. *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis*. 2017; 51(2):509–535. DOI:10.1051/m2an/2016032.
9. **Cockburn B., Kanschat G., Schötzau D., Schwab C.** Local discontinuous Galerkin methods for the Stokes system. *SIAM Journal of Numerical Analysis*. 2002; 40(1):319–343. DOI:10.1137/S0036142900380121.
10. **Schötzau D., Wihler T.** Exponential convergence of mixed hp-DGFEM for Stokes flow in polygons. *Numerische Mathematik*. 2003; (96):339–361. DOI:10.1007/s00211-003-0478-5.
11. **Zhang F., Cheng J., Liu T.** A reconstructed discontinuous Galerkin method for incompressible flows on arbitrary grids. *Journal of Computational Physics*. 2020; (418):109580. DOI:10.1016/j.jcp.2020.109580.
12. **Hou Y., Han Y., Wen J.** An equal-order hybridized discontinuous Galerkin method with a small pressure penalty parameter for the Stokes equations. *Computers and Mathematics with Applications*. 2021; 93(1):58–65. DOI:10.1016/j.camwa.2021.03.031.
13. **Kim H.H., Chung E., Lee C.S.** A staggered discontinuous Galerkin method for the Stokes system. *SIAM Journal of Numerical Analysis*. 2013; 51(6):3327–3350. DOI:10.1137/120896037.
14. **Lubuma J.M-S., Patidar K.C.** Towards the implementation of the singular function method for singular perturbation problems. *Applied Mathematics and Computation*. 2009; (209):68–74. DOI:10.1016/j.amc.2008.06.026.
15. **Jang D.K., Pyo J.H.** Algorithms to apply finite element dual singular function method for the Stokes equations including singularities. *Journal of Korean Society for Industrial and Applied Mathematics*. 2019; (23):115–138. DOI:10.12941/jksiam.2019.23.115.
16. **Al Salem A., Chorfi N.** Solving the Stokes problem in a domain with corners by the mortar spectral element method. *Electronic Journal of Differential Equations*. 2016; 2016(337):1–16.
17. **John L., Pustejovska P., Wohlmuth B., Rude U.** Energy-corrected finite element methods for the Stokes system. *IMA Journal of Numerical Analysis*. 2017; (37):687–729. DOI:10.1093/imanum/drw008.

18. **Choi H.J., Kweon J.R.** A finite element method for singular solutions of the Navier–Stokes. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2016; (292):342–362. DOI:10.1016/j.cam.2015.07.006.
19. **Rukavishnikov V.A., Rukavishnikov A.V.** Theoretical analysis and construction of numerical method for solving the Navier–Stokes equations in rotation form with corner singularity. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2023; (429):115218. DOI:10.1016/j.cam.2023.115218.
20. **Rukavishnikov V.A., Rukavishnikov A.V.** On the existence and uniqueness of an $R\nu$ -generalized solution to the Stokes problem with corner singularity. *Mathematics*. 2022; 10(10):1752. DOI:10.3390/math10101752.
21. **Rukavishnikov V.A.** Differential properties of an $R\nu$ -generalized solution of the Dirichlet problem. *Soviet Mathematics Doklady*. 1990; (40):653–655.
22. **Rukavishnikov V.A., Rukavishnikova E.I.** Existence and uniqueness of an $R\nu$ -generalized solution of the Dirichlet problem for the Lamé system with a corner singularity. *Differential Equations*. 2019; 55(6):832–840. DOI:10.1134/S0012266119060107.
23. **Rukavishnikov A.V., Rukavishnikov V.A.** New numerical approach for the steady-state Navier–Stokes equations with corner singularity. *International Journal of Computational Methods*. 2022; (19):2250012. DOI:10.1142/S0219876222500128.
24. **Rukavishnikov V.A., Nikolaev S.G.** Weighted finite element method for an Elasticity problem with singularity. *Doklady Mathematics*. 2013; (88):705–709. DOI:10.1134/S1064562413060215.
25. **Rukavishnikov V.A., Rukavishnikov A.V.** On the properties of operators of the Stokes problem with corner singularity in nonsymmetric variational formulation. *Mathematics*. 2022; 10(6):889. DOI:10.3390/math10060889.
26. **Rukavishnikov A.V.** On the optimal set of parameters for an approximate method for solving stationary nonlinear Navier–Stokes equations with singularity. *Computational Technologies*. 2022; 27(6):70–87. DOI:10.25743/ICT.2022.27.6.007. (In Russ.)
27. **Rukavishnikov V.A., Mosolapov A.O.** New numerical method for solving time-harmonic Maxwell equations with strong singularity. *Journal of Computational Physics*. 2012; 231(6):2438–2448. DOI:10.1016/j.jcp.2011.11.031.
28. **Rukavishnikov V.A., Rukavishnikova E.I.** Weighted finite element method and body of optimal parameters for elasticity problem with singularity. *Computers & Mathematics with Applications*. 2023; (151):408–417. DOI:10.1016/j.camwa.2023.10.021.
29. **Rukavishnikov V.A., Nikolaev S.G.** Numerical analysis of the weighted finite element method for the elasticity problem with singularity. *Computational Technologies*. 2016; 21(6):89–103. (In Russ.)
30. **Girault V., Raviart P.A.** Finite element methods for Navier–Stokes equations. Theory and algorithms. Berlin-Heidelberg-N.Y.-Tokyo: Springer-Verlag; 1986: 374.
31. **Boffi D., Brezzi F., Fortin M.** Mixed finite element methods and applications. Berlin: Springer; 2013: 685. DOI:10.1007/978-3-642-36519-5.
32. **Alexander R.** Diagonally implicit Runge–Kutta methods for stiff ODEs. *SIAM Journal on Numerical Analysis*. 1977; (14):1006–1021.
33. **Scott L.R., Vogelius M.** Norm estimates for a maximal right inverse of the divergence operator in spaces of piecewise polynomials. *Mathematical Modeling and Numerical Analysis*. 1985; (19):111–143.
34. **Bramble J.H., Pasciak J.E., Vassilev A.T.** Analysis of the inexact Uzawa algorithm for saddle point problems. *SIAM Journal on Numerical Analysis*. 1997; (34):1072–1092. DOI:10.1137/S0036142994273343.
35. **Saad Y.** Iterative methods for sparse linear systems. Minneapolis: Society for Industrial and Applied Mathematics; 2003: 547.
36. **Rukavishnikov V.A., Rukavishnikov A.V.** Weighted finite element method for the Stokes problem with corner singularity. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2018; (341):144–156. DOI:10.1016/j.cam.2018.04.014.
37. **Rukavishnikov V.A., Rukavishnikov A.V.** New numerical method for the rotation form of the Oseen problem with corner singularity. *Symmetry*. 2019; 11(1):54. DOI:10.3390/sym11010054.
38. **Ciarlet P.** The finite element methods for elliptic problems. Amsterdam: North-Holland; 1978: 529.
39. **Rukavishnikov V.A., Rukavishnikova E.I.** Weighted finite-element method for elasticity problems with singularity. *Finite Element Method. Simulations, Numerical Analysis and Solution Techniques*, Eds. Pacurar Razvan. London: IntechOpen Limited; 2018: 295–311. DOI:10.5772/intechopen.72733. Available at: <https://elibrary.ru/item.asp?id=43135863&ysclid=m2466uiw1z30103709>.